

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें ।

Candidate should write his/her Roll No. here.

कुल प्रश्नों की संख्या : 5

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 12

Total No. of Questions : 5

No. of Printed Pages : 12

M0712010

गणित

MATHEMATICS

प्रथम प्रश्न-पत्र

First Paper

समय : 3 घंटे]

[पूर्णांक : 300

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 300

परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल पाँच प्रश्न हैं । सभी प्रश्नों के उत्तर देने हैं । प्रश्न क्र. 2 से 5 तक में आंतरिक विकल्प हैं ।

This question paper consists of *five* questions. *All* the questions have to be answered. Question Nos. **2** to **5** have an internal choice.

2. प्रश्न-पत्र के कुल अंक 300 हैं तथा निर्धारित समय 3 घंटे है । यदि अन्यथा नहीं दर्शाया गया है, तो सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका चयन आपने अपने आवेदन-पत्र में किया है । किसी अन्य माध्यम में लिखे गये उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेगा । सभी पाँच प्रश्न करना अनिवार्य है । प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें, एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जायें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जायें । परीक्षा में सामान्य कैलकुलेटर ही उपयोग में लिया जा सकता है, साइंटिफिक नहीं ।

The total number of marks of the question paper is **300** and the time allotted is **3** hours. *All* questions carry equal marks, unless specifically stated otherwise. Answers should be written in the medium which you have chosen in your Application Form. No marks will be awarded, if the answer is written in any other medium. All the five questions must be answered. Questions should be answered exactly in order in which they appear in the question paper. Answers to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answers of other questions should be inserted between them. Regular calculator alone can be used in the exam, not the Scientific one.

3. प्रथम प्रश्न लघु उत्तरीय होगा जिसमें **20** अनिवार्य प्रश्न होंगे । प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **एक** अथवा **दो** पंक्तियों में देना होगा ।

The first question will be of short answer type consisting of **20** compulsory questions. Each one is to be answered in *one* or *two* lines.

4. जहाँ शब्द सीमा दी गई है उसका अवश्य पालन करें ।

Wherever word limit has been given, it must be adhered to.

5. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की कोई मुद्रण या तथ्यात्मक प्रकार की त्रुटि हो, तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी रूपांतर में से अंग्रेजी रूपांतर मानक माना जायेगा ।

In case there is any error of printing or factual nature, then out of the Hindi and English versions of the question, the English version will be treated as standard.

1. निम्नलिखित लघु उत्तरीय प्रश्नों में से प्रत्येक का उत्तर 1 या 2 पंक्तियों में दीजिए : $20 \times 3 = 60$

Answer the following short answer type questions in 1 or 2 lines each :

- (A) प्रसामान्य समूह को परिभाषित कीजिए ।

Define normal subgroup.

- (B) कैली प्रमेय का कथन लिखिए ।

Write the statement of Cayley's theorem.

- (C) रिंग समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए ।

Define kernel of ring homomorphism.

- (D) नरिम्न विमीय सदिश समष्टि की परिभाषा लिखिए ।

Define finite dimensional vector space.

- (E) रेखिक रूपान्तरण की शून्यता की परिभाषा लिखिए ।

Define nullity of a linear transformation.

- (F) प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय को परिभाषित कीजिए ।

Define orthonormal set.

- (G) नति परिवर्तन बिन्दु को परिभाषित कीजिए ।

Define point of inflexion.

(H) फलन

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3x - x^2}{2}\right)}$$

का प्रान्त लिखिए ।

Write the domain of the function :

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3x - x^2}{2}\right)}$$

(I) फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए ।

Define limit of a function.

(J) तीन चरों के लिए डिरिचलेट समाकल को अस्तित्व की शर्तों सहित लिखिए ।

Write Dirichlet's integral for three variables with conditions of existence.

(K) समाकल

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(1+x^4)}{(1+x)^{10}} dx$$

का मान लिखिए ।

Write the value of the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(1+x^4)}{(1+x)^{10}} dx.$$

(L) क्षेत्रकलन की परिभाषा लिखिए ।

Define quadrature.

(M) अवकल समीकरण के क्रम को परिभाषित कीजिए ।

Define order of the differential equation.

(N) उन समस्त वृत्तों के अवकल समीकरण लिखिए जो मूल बिन्दु से गुजरते हैं तथा जिनके केन्द्र x -अक्ष पर स्थित हैं ।

Write the differential equation of all the circles passing through the origin and having their centres on the x -axis.

(O) दिक् अवकलज को परिभाषित कीजिए ।

Define direction derivative.

(P) अघूर्णित मदिश से क्या अभिप्राय है ?

What do you mean by irrotational vector ?

(Q) बिन्दु के ध्रुवीय निर्देशांकों को परिभाषित कर दो बिन्दुओं के मध्य की दूरी ज्ञात करने का सूत्र लिखिए (ध्रुवीय रूप) ।

Define polar co-ordinates of a point and write the formula for obtaining the distance between two points (polar form).

(R) समतल $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance of the plane $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ from the origin.

(S) ककुदता की परिभाषा लिखिए ।

Define kurtosis.

(T) अन्तरचतुर्थक की परिभाषा लिखिए ।

Define interquartile range.

2. (a) निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

30×2

$$x(x - 2a) y^2 = a^2(x - a) (x - 3a).$$

Trace the following curve :

$$x(x - 2a) y^2 = a^2(x - a) (x - 3a).$$

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिये कि n कोटि के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए एक समूह है जिसका समूहांक $\frac{1}{2}(n!)$ है ।

Prove that the set A_n of all even permutations of degree n is a group of order $\frac{1}{2}(n!)$ for the product of permutations.

(b) दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

का किसी नाभिलम्ब से कटा हुआ भाग पास वाले सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखा का परिक्रमण करता है । इस प्रकार जनित चर्खी का आयतन ज्ञात कीजिए ।

The part of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cut off by a latus rectum revolves about the tangent at the nearer vertex. Find the volume of the reel thus generated.

अथवा

Or

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\dim(V|W) = \dim V - \dim W.$$

If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that :

$$\dim(V|W) = \dim V - \dim W.$$

3. (a) अवकल समीकरण

$$(px - y)(x - py) = 2p; \quad p = \frac{dy}{dx}$$

का विचित्र हल ज्ञात कीजिए ।

Find the singular solution of the differential equation :

$$(px - y)(x - py) = 2p; \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

अथवा

(Or)

यदि द्विपद बंटन (n, p) के लिए माध्य के सापेक्ष r वाँ आघूर्ण μ_r हो तो सिद्ध कीजिए कि,

$$\mu_{r+1} = pq \left[nr \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right]$$

और μ_2, μ_3, μ_4 भी ज्ञात कीजिए ।

If μ_r denotes the r th moment about the mean for a binomial distribution (n, p) , then prove that :

$$\mu_{r+1} = pq \left[nr \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right]$$

and hence obtain μ_2, μ_3 and μ_4 .

(b) स्टोक्स प्रमेय को फलन

$$\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$$

के लिए सत्यापित कीजिए, जहाँ C एक xy -समतल का इकाई वृत्त है जो गोलार्द्ध

$$z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$$

को परिबद्ध किए हुए है ।

Verify Stokes' theorem for the function

$$\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k},$$

where the curve C is the unit circle in the xy -plane bounding the hemisphere :

$$z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}.$$

अथवा

(Or)

एक चतुष्फलक के दो सम्मुख कोरों की लम्बाइयाँ क्रमशः a और b हैं, उनके बीच की लघुतम दूरी d है । यदि उनके बीच कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि चतुष्फलक का आयतन $\frac{1}{6}abd \sin \theta$ होगा ।

If the lengths of two opposite edges of a tetrahedron are a and b , their shortest distance is d and the angle between them is θ , then prove that its volume is $\frac{1}{6}abd \sin \theta$.

4. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G से समूह G' पर परिभाषित किसी समाकारिता f की अष्टि, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है । 30×2

Prove that the kernel of homomorphism f of a group G to a group G' is a normal subgroup of G .

अथवा

(Or)

हल कीजिए :

Solve :

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}.$$

- (b) ग्राम-शिमिट प्रक्रम का उपयोग करके \mathbb{R}^3 के निम्न आधार से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए :

$$\{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}.$$

Apply Gram-Schmidt process to obtain the orthonormal basis for \mathbb{R}^3 whose basis is given below :

$$\{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}.$$

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax \tan^{-1} bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \log \left\{ \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \right\}.$$

5. किन्हीं चार भागों पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

15×4=60

Write short notes on any four parts :

- (a) माध्य विचलन ।

Mean deviation.

- (b) दीर्घवृत्तज की प्रकृति एवं आकार ।

Nature and shape of the ellipsoid.

- (c) सदिश फलन का अपसरण एवं इसके गुणधर्म ।

Divergence of a vector function and its properties.

- (d) एक चर के फलनों के लिये उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ ।

Maxima and minima of functions of one variable.

(e) प्रायिकता का गुणन नियम ।

Multiplication rule of probability.

(f) द्विविम ज्यामिति में द्विघात समीकरण ।

Second degree equation in two-dimensional geometry.

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें ।

Candidate should write his/her Roll No. here.

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 20

No. of Printed Pages : 20

कुल प्रश्नों की संख्या : 5

Total No. of Questions : 5

M0722010

गणित

MATHEMATICS

द्वितीय प्रश्न-पत्र

Second Paper

समय : 3 घंटे]

Time : 3 Hours]

[पूर्णांक : 300

[Total Marks : 300

परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल पाँच प्रश्न हैं । सभी प्रश्नों के उत्तर देने हैं । प्रश्न क्र. 2 से 5 तक में आंतरिक विकल्प हैं ।

This question paper consists of *five* questions. *All* the questions have to be answered. Question Nos. 2 to 5 have an internal choice.

2. प्रश्न-पत्र के कुल अंक 300 हैं तथा निर्धारित समय 3 घंटे है । यदि अन्यथा नहीं दर्शाया गया है, तो सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका चयन आपने अपने आवेदन-पत्र में किया है । किसी अन्य माध्यम में लिखे गये उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेगा । सभी पाँच प्रश्न करना अनिवार्य है । प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें, एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जायें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जायें । परीक्षा में मान्य कैलकुलेटर ही उपयोग में लिया जा सकता है, साइन्टिफिक नहीं ।

The total number of marks of the question paper is **300** and the time allotted is **3** hours. *All* questions carry equal marks, unless specifically stated otherwise. Answers should be written in the medium which you have chosen in your Application Form. No marks will be awarded, if the answer is written in any other medium. All the five questions must be answered. Questions should be answered exactly in order in which they appear in the question paper. Answers to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answers of other questions should be inserted between them. Regular calculator alone can be used in exam, not the Scientific one.

3. प्रथम प्रश्न लघु उत्तरीय होगा जिसमें 20 अनिवार्य प्रश्न होंगे । प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अथवा दो पंक्तियों में देना होगा ।

The first question will be of short answer type consisting of **20** compulsory questions, each one is to be answered in *one* or *two* lines.

4. जहाँ शब्द सीमा दी गई है उसका अवश्य पालन करें ।

Wherever word limit has been given, it must be adhered to.

5. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की कोई मुद्रण या तथ्यात्मक प्रकार की त्रुटि हो, तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी रूपांतर में से अंग्रेजी रूपांतर मानक माना जायेगा ।

In case there is any error of printing or factual nature, then out of the Hindi and English versions of the question, the English version will be treated as standard.

1. निम्न सभी लघु उत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिए :

20×3=60

Attempt *all* short answer type questions :

(A) यदि एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ एवं कोण इस प्रकार बदलते हैं कि अंतःवृत्त त्रिज्या स्थिरांक है तब सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\delta a}{\cos A} - \frac{\delta b}{\cos B} + \frac{\delta c}{\cos C} = 0$$

जहाँ δa , δb , δc क्रमशः भुजाओं a , b , c में सूक्ष्म वृद्धि को दर्शाते हैं ।

If the sides and the angles of a triangle ABC vary in such a way that circumradius remains constant, prove that :

$$\frac{\delta a}{\cos A} + \frac{\delta b}{\cos B} + \frac{\delta c}{\cos C} = 0$$

where δa , δb , δc denote small increments in the sides a , b , c respectively.

(B) सिद्ध कीजिए कि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूलबिंदु पर संतत है ।

Show that :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at origin.

(C) मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}.$$

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}.$$

(D) ध्रुवीय सूत्र :

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$$

को कार्तीय सूत्र में रूपांतरित कीजिए ।

Transform the polar formula :

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$$

into Cartesian form.

(E) यदि $x^y + y^x = a^b$, तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x^y + y^x = a^b$, find $\frac{dy}{dx}$.

(F) यदि $f(z) = u + iv$ एक $z = x + iy$ का विश्लेषिक फलन है, सिद्ध कीजिए कि वक्र कुल $u = c_1, v = c_2$ जहाँ c_1 और c_2 प्राचल हैं, एक दूसरे पर लांबिक हैं ।

If $f(z) = u + iv$ be an analytic function of $z = x + iy$, prove that the families of curves $u = c_1, v = c_2$ are orthogonal to each other, where c_1 and c_2 are parameters.

(G) यदि

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < R)$$

और $M(r)$ वृत्त $|z| = r (r < R)$ पर $|f(z)|$ का उपरिबंध है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$|a_n| r^n \leq M(r) \quad \forall n.$$

If

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < R)$$

and $M(r)$ is the upper bound of $|f(z)|$ on the circle $|z| = r (r < R)$, then prove that :

$$|a_n| r^n \leq M(r) \quad \forall n.$$

(H) यदि $0 < |z - 1| < 2$, तो

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

को $(z-1)$ की धनात्मक एवं ऋणात्मक घातों की श्रेणी में व्यक्त कीजिए ।

If $0 < |z - 1| < 2$, then express

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

in a series of positive and negative powers of $(z - 1)$.

(I) $f(z) = (z - 3) \sin\left(\frac{1}{z + 2}\right)$ की $z = -2$ पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात कीजिए ।

Specify the nature of singularity at $z = -2$ of

$$f(z) = (z - 3) \sin\left(\frac{1}{z + 2}\right).$$

(J) यदि

$$u = \log \frac{x^4 + y^4}{x + y},$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

If

$$u = \log \frac{x^4 - y^4}{x + y}$$

then show that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

(K) ग्राफ द्वारा हल कीजिए :

न्यूनतम $z = 6x_1 + 14x_2$

इस प्रकार कि

$$5x_1 + 4x_2 \geq 60$$

$$3x_1 + 7x_2 \leq 54$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 18$$

और $x_1, x_2 \geq 0.$

Solve graphically :

$$\text{Minimize : } z = 6x_1 + 14x_2$$

such that

$$5x_1 + 4x_2 \geq 60$$

$$3x_1 + 7x_2 \leq 84$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 18$$

and $x_1, x_2 \geq 0$.

(L) दी गई रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या का द्वैत लिखिए :

महत्तम $z = 4x_1 + 2x_2$

प्रतिबंधों

$$-x_1 - x_2 \leq -3$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

और $x_1, x_2 \geq 0$.

Write the dual of the given L.P.P. :

$$\text{Maximize : } z = 4x_1 + 2x_2$$

subject to constraints :

$$-x_1 - x_2 \leq -3$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

and $x_1, x_2 \geq 0$.

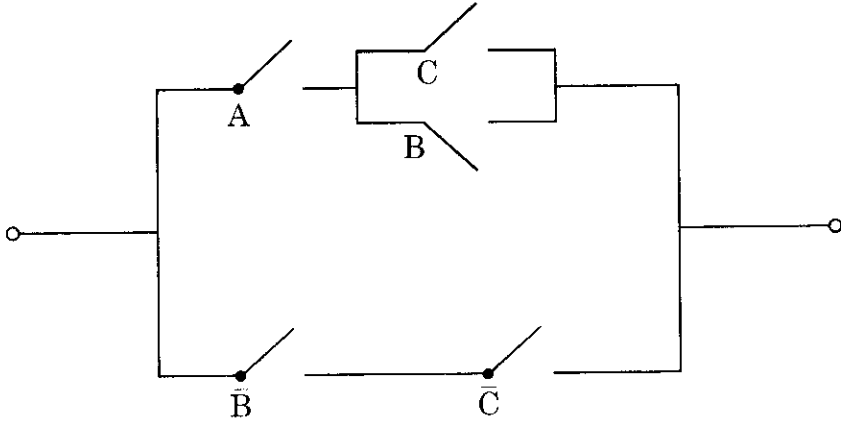
- (M) VAM विधि द्वारा निम्न परिवहन समस्या के लिये प्रारंभिक आधारभूत संभावित हल ज्ञात कीजिए :

फैक्टरी	वेयरहाउस				क्षमता
	W_1	W_2	W_3	W_4	
F_1	21	16	25	13	11
F_2	21	18	14	23	13
F_3	21	27	18	41	19
मांग	6	10	12	15	43

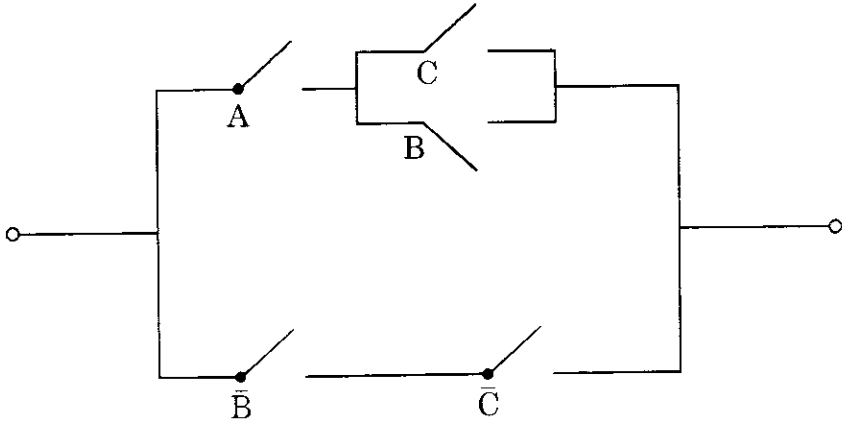
Find the initial basic feasible solution for the following transportation problem by VAM :

Factory	Warehouse				Capacity
	W_1	W_2	W_3	W_4	
F_1	21	16	25	13	11
F_2	21	18	14	23	13
F_3	21	27	18	41	19
Demand	6	10	12	15	43

(N) निम्न चित्रानुसार स्विचन परिपथ के संगत बूलीय विस्तार को ज्ञात कीजिए :



Determine the Boolean expression corresponding to the switching circuit in the given figure.



(O) निम्न बूलीय विस्तारों को NOR गेट द्वारा प्रदर्शित कीजिए :

(a) $X = ABC.$

(b) $X = A' + B + C.$

Use NOR gates to implement the following Boolean Expressions :

(a) $X = ABC.$

(b) $X = A' + B + C.$

(P) $a, b, c \in B$ के लिये, दिखाइये :

$$b \cdot a = c \cdot a \text{ एवं } b \cdot a' = c \cdot a' \Rightarrow b = c.$$

For $a, b, c \in B$, prove that :

$$b \cdot a = c \cdot a \text{ and } b \cdot a' = c \cdot a' \Rightarrow b = c.$$

(Q) न्यूटन-राफसन सूत्र द्वारा दिखाइये कि $N = AB$ का मूल :

$$\sqrt{N} = \frac{S}{4} + \frac{N}{S}, \quad S = A + B$$

द्वारा दिया जाता है ।

Show that the square root of $N = AB$ is given by :

$$\sqrt{N} = \frac{S}{4} + \frac{N}{S}, \text{ where } S = A + B$$

by Newton-Raphson's formula.

(R) सिम्पसन के $1/3$ नियम द्वारा

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$$

का मान ज्ञात कीजिए !

Evaluate :

$$\int_0^6 \frac{dx}{1-x^2}$$

by using Simpson's one-third rule.

(S) हल कीजिए :

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2).$$

Solve :

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2).$$

(T) क्लैरो समीकरण

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए ।

Find the complete integral of the Clairaut's equation :

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

2. (A) यदि $[a, b]$ पर $f \in R(g)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

30×2=60

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq M[g(b) - g(a)]$$

जहाँ m एवं M , $[a, b]$ में f के परिबंध हैं ।

Let $f \in R g$ on $[a, b]$. Then prove that :

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq M[g(b) - g(a)]$$

where m, M are the bounds of f on $[a, b]$.

अथवा

(Or)

गॉस विलोपन विधि द्वारा समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$3x + (3 + \xi)y + 4z = 20$$

$$2x + y + 3z = 13$$

जहाँ ξ इस प्रकार न्यून है कि $1 \pm \xi^2 \approx 1$. क्या होगा जब हम द्वितीय चरण में आंशिक धूरीय का प्रयोग नहीं करें ।

Solve the system of equations :

$$x + y + z = 6$$

$$3x + (3 + \xi)y + 4z = 20$$

$$2x + y + 3z = 13$$

using Gauss Elimination method where ξ is small such that $1 \pm \xi^2 \approx 1$. What happens if we do not use partial pivoting at second step ?

(B) दिये गये आंशिक अवकल समीकरण का हल कीजिए :

$$(x^2 - y^2 || p^2 + q^2) = 1.$$

Solve the given partial differential equation :

$$(x^2 + y^2 || p^2 + q^2) = 1.$$

अथवा

(Or)

वैश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y)$$

है ।

Find the analytic function $f(z) = u + iv$ whose real part is

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

3. (A) द्विभाजन विधि के प्रयोग से 30 के वर्गमूल का दशमलव के चार अंकों तक शुद्ध मान ज्ञात कीजिए । 30×2=60

Use Bisection method to find out the positive square root of 30 correct to 4 decimal places.

अथवा

(Or)

एक कण वक्र $y = a \log \sec \frac{x}{a}$ पर इस प्रकार गतिमान है कि वक्र की स्पर्शिका का कोणीय वेग अचर है । दिखाइये कि कण का परिणामी त्वरण उस बिन्दु पर वक्रता-त्रिज्या के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है ।

A particle is moving at a curve $y = a \log \sec \frac{x}{a}$ such that the angular velocity of at its tangent is constant. Prove that resultant acceleration of particle at this point is proportional to square of radius of curvature.

(B) परिरेखा (कण्टूर) समाकलन के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = \frac{2\pi}{1 - a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Use the method of contour integration to prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = \frac{2\pi}{1 - a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

अथवा

(Or)

l लम्बाई की एक समांग डोरी के दोनों सिरों को एक ही क्षैतिज धरातल में स्थित दो बिन्दुओं A एवं B से बाँधकर लटकाया जाता है । इस प्रकार किसी भी सिरे पर तनाव डोरी के निम्नतम बिन्दु पर तनाव का n गुना है । तब दिखाइये कि डोरी की विस्तृति AB :

$$\frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log(n + \sqrt{n^2 - 1})$$

होगी ।

A uniform chain, of length l , is to be suspended from two points A and B, in the same horizontal line so that either terminal tension is n times that at the lowest points. Show that the span AB must be :

$$\frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log(n - \sqrt{n^2 - 1}).$$

4. एक घन की तीन अप्रतिच्छेदी कोरों पर कार्यरत बलों P, Q एवं R के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए । 60

Find the equation of central axes of the forces P, Q, R acting along the non-intersecting edges of a cube.

अथवा

(Or)

चार भिन्न छड़ों को जोड़कर एक चतुर्भुज बनाया जाता है तथा इसकी विपरीत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को l एवं l' लम्बाइयों की भारहीन छड़ों से जोड़ा जाता है, यदि इन छड़ों में तनाव क्रमशः T एवं T' हो, तब दिखाइये :

$$\frac{T}{l} + \frac{T'}{l'} = 0.$$

A quadrilateral is formed from four different rods and the mid points of its opposite sides are joint by two weightless rods of length l and l' . If T and T' are the thrust in the rods respectively. Then prove that :

$$\frac{T}{l} + \frac{T'}{l'} = 0.$$

5. किन्हीं चार भागों को हल कीजिये : 15×4=60

Solve any four parts :

- (A) (i) यदि X, अन्तराल $[0, 1]$ पर परिभाषित समस्त वास्तविक मानी परिबद्ध एवं सतत फलनों का समुच्चय है तथा X में मानक $\|f\|$, $f \in X$

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

द्वारा परिभाषित है । यदि फलन $d : X \times X^0 \rightarrow R$

$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \forall f, g \in X$$

द्वारा परिभाषित है, तो दिखाइये कि d , X पर एक दूरीक है ।

Let X be the set of all real valued bounded continuous functions defined on the closed interval $[0, 1]$. We define the norm of the function $f \in X$ by :

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

If d is a mapping of $X \times X^0$ into \mathbb{R} defined by :

3.
$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \forall f, g \in X.$$

Show that d is a metric of X .

(ii) सिम्प्लेक्स विधि के प्रयोग से आव्यूह :

4.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

5.

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

Apply simplex method to find the inverse of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(B) (i) यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक अचर फलन है तो सिद्ध कीजिए कि f सतत है ।

Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a constant mapping prove that f is continuous.

(ii) निम्न रैखिक प्रक्रम समस्या को हल कीजिए :

$$\text{अधिकतम } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

प्रतिबन्धों के तहत :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Solve the following L.P. problem :

$$\text{Max. } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

(C) (i) यदि

$$u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$$

तथा $f(z) = u + iv$ एक $z = x + iy$ का वैश्लेषिक फलन है तब $f(z)$ का मान z के पदों में ज्ञात कीजिए ।

If

$$u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$$

and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ in terms of z .

- (ii) यदि z_0 एक फलन $f(z)$ का पृथक्कीय विचित्र बिन्दु है तथा $|f(z)|$ z_0 के किसी निष्कासित सामीप्य में परिबद्ध है, तब दिखाइये कि z_0 एक अपनेय विचित्र बिन्दु होगा ।

Let z_0 be an isolated singularity of $f(z)$ and if $|f(z)|$ is bounded on some deleted neighbourhood of z_0 , then prove that z_0 is a removable singularity.

- (D) (i) निम्न परिवहन समस्या को हल कीजिए :

		को			
		1	2	3	आपूर्ति
द्वारा	1	2	7	4	5
	2	3	3	1	8
	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
माँग		7	9	18	34

Solve the following transportation problem :

		To			
		1	2	3	Supply
From	1	2	7	4	5
	2	3	3	1	8
	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
Demand		7	9	18	34

- (ii) दिखाइये कि अन्तराल $[0, 1]$ पर निम्नानुसार परिभाषित फलन रीमॉन समाकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x \text{ परिमेय है} \\ 1-x & x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

Show that :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x \text{ is rational} \\ 1-x & x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is not Riemann integrable on interval $[0, 1]$.

- (E) (i) दी गई सारणी से $\sin 52^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए :

θ°	45°	50°	55°	60°
$\sin \theta$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

Find the value of $\sin 52^\circ$ from the given table :

θ°	45°	50°	55°	60°
$\sin \theta$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

- (ii) एक समतल में एक कण इस प्रकार गतिमान है कि इसका स्पर्शीय एवं अभिलंब त्वरण सदैव समान रहता है और इसका वेग $e^{\tan^{-1}(s/c)}$ से बदलता है जहाँ s वक्र पर एक स्थिर बिन्दु से मापी गई वक्र के चाप की लम्बाई है ।

A particle moves in a plane in such a manner that its tangential and normal accelerations are always equal and its velocity varies as $e^{\tan^{-1}(s/c)}$, s being the length of the arc of the curve measured from a fixed point on the curve find the path.

(F) (i) चार्पिट विधि द्वारा अवकल समीकरण :

$$p = (qy + z)^2$$

का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए ।

Find the complete integral of the differential equations by

Charpit's method $p = (qy + z)^2$.

(ii) समघाती फलनों के लिये ऑयलर प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए ।

State and prove Euler's theorem for homogeneous functions.