

अनुक्रमांक/ Roll No.

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें ।

Candidate should write his/her Roll No. here.

कुल प्रश्नों की संख्या : 03

Total No. of Questions : 03

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

No. of Printed Pages : 8

**M-SFS-I-2017 (05)**

गणित

**MATHEMATICS**

ऐच्छिक विषय (Optional Subject)

प्रथम प्रश्न-पत्र

First Paper

समय : 3 घंटे ]

Time : 3 Hours ]

[ पूर्णांक : 200

[ Total Marks : 200

परीक्षार्थियों के लिए निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल तीन प्रश्न हैं तथा सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।  
This question paper consists of three questions and all questions are compulsory.
2. प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने अंकित हैं ।  
Marks for each question have been indicated on the right hand margin.
3. प्रश्न क्रमांक - 1 में कोई आंतरिक विकल्प नहीं है । शेष प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिया गया है ।  
There is no internal choice in Question No. 1, remaining questions carry internal choice.

M-SFS-I-2017 (05)

P.T.O.

4. प्रथम प्रश्न अत्यन्त लघु-उत्तरीय है, जिसमें 15 अनिवार्य प्रश्न हैं। प्रत्येक का उत्तर एक अथवा दो पंक्तियों में देना है। प्रश्न क्रमांक - 2 लघु उत्तरीय है, शब्द सीमा 100 है। प्रश्न क्रमांक-3 दीर्घ उत्तरीय/निबंधात्मक है, शब्द सीमा 300 है।

The first question is of short-answer type consisting of 15 compulsory questions. Each one is to be answered in one or two lines. Question No. 2 is short answer type, word limit is 100. Question No. 3 is long answer / Essay type, word limit is 300.

5. जहाँ शब्द सीमा दी गई है, उसका पालन करें।

Wherever word limit has been given, it must be followed to.

6. प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें। एक प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से क्रमानुसार लिखें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर ना लिखें।

Question should be answered exactly in the order same as mentioned in the question paper. Answer to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answer of the other question should be inserted between them.

7. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की तथ्यात्मक तथा मुद्रण त्रुटि हो तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी में से अंग्रेजी रूपान्तर को मानक माना जायेगा।

In case there is any error of factual nature or printing, then out of the Hindi and English version of the question, the English version will be treated as standard.

1. निम्नलिखित प्रत्येक लघु-उत्तरीय प्रश्न का उत्तर एक या दो पंक्तियों में दीजिए :  $15 \times 4 = 60$

Give answer of the following questions in one or two lines :

(A) आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  की जाति निकालिए।

Find the rank of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ .

(B) आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  का आइगन मान निकालिए।

Find eigen values of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (C) समीकरण  $x^3 - 7x^2 + 8x + 9 = 0$  के मूल  $\alpha, \beta, \gamma$  हैं तो  $\alpha + \beta + \gamma$  और  $\alpha\beta\gamma$  के मान निकालिए।

If  $\alpha, \beta, \gamma$  be roots of the equation  $x^3 - 7x^2 + 8x + 9 = 0$ , then find the values of  $\alpha + \beta + \gamma$  and  $\alpha\beta\gamma$ .

- (D) यदि  $\frac{\cos 8\theta + i \sin 8\theta}{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^3} = \cos a\theta + i \sin 2b\theta$  तो  $a$  और  $b$  के मान दीजिए।

If  $\frac{\cos 8\theta + i \sin 8\theta}{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^3} = \cos a\theta + i \sin 2b\theta$ , then give the values of  $a$  and  $b$ .

- (E) दिखाइए : सभी चक्रीय समूह अबेलियन समूह होते हैं।

Show that every cyclic group is an abelian group.

- (F) क्रमचय समूह  $S_3$  के सभी अवयव लिखिए।

Write all elements of the permutation group  $S_3$ .

- (G)  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  का मान निकालिए।

Let  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ . Find  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

- (H) यदि  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  बिंदु  $x = c$  को अवकलनीय है तो सिद्ध कीजिए की  $f$  बिंदु  $x = c$  को सातत्य है।

Prove that if  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is differentiable at  $x = c$ , then  $f$  is continuous at  $x = c$ .

(I) सिद्ध कीजिए :

$$i \log \left( \frac{x-i}{x+i} \right) = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

Prove that

$$i \log \left( \frac{x-i}{x+i} \right) = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

(J)  $\sin x$  और  $\log(1-x)$  फलनों के मैकलॉरिन श्रेणी प्रसार लिखिए ।

Write Maclaurin series of  $\sin x$  and  $\log(1-x)$ .

(K) समघाती फलन का ऑयलर प्रमेय कथन दीजिए ।

State Euler's theorem for homogeneous function.

(L) यदि  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  है तो जैकोबियॉन  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  निकालिए ।

Find Jacobian  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ , where  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

(M) समाकल  $\int \log x \, dx$  का मान निकालिए ।

Evaluate  $\int \log x \, dx$ .

(N) बीटा फलन  $\beta(3, 4)$  का मान निकालिए ।

Evaluate  $\beta(3, 4)$ .

(O) समाकलन  $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$  के क्रम परिवर्तन कीजिए ।

Change the order of integration  $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$ .

2. निम्नलिखित में से किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर लिखिए । प्रत्येक उत्तर लगभग 100 शब्दों में हो ।

10 × 8 = 80

Write the answer of ten questions from the following questions. Each answer may be in nearly 100 words.

(A) सिद्ध करो कि एक हर्मिशियन आव्यूह के दो भिन्न-भिन्न अभिलाक्षणिक मूलों के संगत दो अभिलाक्षणिक सदिश लांबिक होंगे ।

Prove that any two characteristic vectors corresponding to two distinct characteristic roots of a Hermitian matrix are orthogonal.

(B)  $\lambda$  के किस वास्तव मान के लिए समीकरण निकाय

$$x + 2y + 3z = \lambda x, 3x + y + 2z = \lambda y, 2x + 3y + z = \lambda z$$
 के एक ही हल है ?

For which real value of  $\lambda$  the equations

$$x + 2y + 3z = \lambda x, 3x + y + 2z = \lambda y, 2x + 3y + z = \lambda z$$
 have unique solution ?

(C) समीकरण  $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$  के हल निकालिए, जबकि उसका एक मूल दूसरे मूल से दोगुना है ।

Solve the equation  $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ , one root being double another.

(D) वह शर्त ज्ञात करो जबकि घनीय समीकरण  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  के मूल हरात्मक श्रेणी में होंगे अतएव समीकरण  $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$  को हल करो ।

Find the condition that the roots of the cubic  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  may be in H.P. and hence solve the equation  $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ .

- (E) सिद्ध कीजिए :  $\sin(ix) = i \sinh x$  और  $\cosh^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , जहाँ  $x \in \mathbb{R}$ , ( $|x| > 1$ ).

Prove that  $\sin(ix) = i \sinh x$  and  $\cosh^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , where  $x \in \mathbb{R}$ , ( $|x| > 1$ ).

- (F) सिद्ध कीजिए : समूह  $G$  की केंद्रीयकारका  $Z(G)$  यह सामान्य उपसमूह है ।

Prove that the centralizer  $Z(G)$  of a group  $G$  is a normal subgroup of  $G$ .

- (G) सिद्ध कीजिए : परिमित पूर्णांकीय प्रांत क्षेत्र होता है ।

Prove that a finite integral domain is a field.

- (H) यदि  $f(x) = x^x + \log(\sin x)$  तो  $f'(x)$  निकालिए ।

If  $f(x) = x^x + \log(\sin x)$ , then determine  $f'(x)$ .

- (I) यदि  $f(x) = \cos x$  और  $g(x) = \sin x$ , तो सिद्ध कीजिए  $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  और

$$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \forall n \in \mathbb{N}.$$

If  $f(x) = \cos x$  and  $g(x) = \sin x$ , then prove that  $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  and

$$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (J)  $\epsilon$ - $\delta$  तकनीकी का उपयोग करके  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-1)} (3x - 2y) = 14$  दिखाइए ।

Using  $\epsilon$ - $\delta$  technique prove that  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-1)} (3x - 2y) = 14$ .

- (K)  $x^x y^y z^z = k$  के पृष्ठ पर बिंदु  $x = y = z$  के स्थान पर  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  का मान निकालिए, जहाँ  $k$  स्थिरांक है ।

Evaluate  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  at the point  $x = y = z$  on the surface  $x^x y^y z^z = k$ , where  $k$  is a constant.

(L) सिद्ध कीजिए:  $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$

Prove that  $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$

(M) सिद्ध कीजिए:  $\Gamma(2m) = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)$

Prove that  $\Gamma(2m) = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right).$

3. निम्नलिखित तीन प्रश्नों के उत्तर लिखिए। प्रत्येक उत्तर लगभग 300 शब्दों में हो।  $3 \times 20 = 60$

Write the answer of following **three** questions. Each answer may be in nearly **300** words.

(A) सिद्ध करो कि निम्नलिखित रेखीय समीकरणों सुसंगत हैं और उनका हल निकालिए :

Show that the following system of equations is consistent and find its complete solution

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_3 + 3x_4 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 7$$

अथवा / OR

वक्र  $y = a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$  का अनुरेखन कीजिए तथा उस ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए जो इस वक्र के इसके अनन्तस्पर्शी के परितः परिभ्रमण से बनता हो।

Trace the curve  $y = a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$  and find the volume of the solid generated by the revolution of this curve about its asymptote.

- (B) सिद्ध करो कि प्रत्येक क्रमचय समूह का उपसमूह क्रमचय होता है और क्रमचय समूह  $G = \langle a \rangle$  की कोटि  $n$  है तथा  $n$  का घन पूर्णांक  $k$  भाजक है तो  $G$  का  $k$  कोटि का एक ही उपसमूह  $\langle a^{n/k} \rangle$  है।

Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic and if  $G = \langle a \rangle$  is a cyclic group of order  $n$  and  $k$  is a positive divisor of  $n$ , then  $G$  has exactly one subgroup of order  $k$ , namely  $\langle a^{n/k} \rangle$ .

- (C) उत्तरोत्तर अवकलन और दो फलनों के गुणाकार के लैबनीज प्रमेय का कथन और सिद्धता दीजिए।

State and prove Leibnitz theorem for successive differentiation of product of two functions.

अथवा / OR

एक वक्र  $x = f(t)$ ,  $y = \phi(t)$  प्राचलिक रूप में दिया गया है। इस रूप के लिए वक्रता-त्रिज्या का सूत्र ज्ञात कीजिए तथा अतैव सिद्ध कीजिए  $[(P_1)^{2/3} + (P_2)^{2/3}] (ab)^{2/3} = a^2 + b^2$  जबकि  $P_1, P_2$  एक दीर्घ-वृत्त के अन्त छोर की अर्ध-संयुग्मी व्यास के जोड़े की वक्रता-त्रिज्या हैं;  $a, b$  दीर्घ व लघु अक्ष हैं।

Given a curve in parametric form as  $x = f(t)$ ,  $y = \phi(t)$ . Derive radius of curvature formula for this form and hence prove that for  $P_1, P_2$  are radii of curvature at the extremities of a pair of semi-conjugate diameters of an ellipse, with semi-major & minor axis as  $a$  and  $b$ ,  $[(P_1)^{2/3} + (P_2)^{2/3}] (ab)^{2/3} = a^2 + b^2$ .